SUR LES FONCTIONNELLES BILINÉAIRES*

PAR

MAURICE FRÉCHET

Introduction

Le présent travail est le développement de la dernière partie d'une note, " Sur les fonctionnelles continues," insérée dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.† Il est consacré à la représentation analytique des fonctionnelles bilinéaires. Après un rappel de quelques définitions et propriétés (§§ 1, 2) je montre d'abord (§§ 3, 4) que la continuité de la fonctionnelle distributive $U_{f,\phi}$ par rapport à f et ϕ séparément entraîne sa continuité par rapport à l'ensemble de f et de ϕ. On déduit alors facilement (§ 5) d'un théorème de F. Riesz sur les fonctionnelles linéaires la représentation d'une fonctionnelle bilinéaire par deux intégrales successives effectuées au sens de Stieltjes. Celles-ci peuvent être représentées (§ 6) par une expression de la forme

$$(1) \qquad \lim_{\epsilon,\, \epsilon'=0} \sum_i \sum_j f(\xi_i)\phi(\eta_j)\Delta_{ij}\, u(s, t)$$

où Δ_{ij} est la différence seconde de u

$$\Delta_{i,j}\, u(s, t) = u(s_i, t_j) - u(s_{i-1}, t_j) - u(s_i, t_{j-1}) + u(s_{i-1}, t_{j-1})$$

et où ϵ, ϵ' sont les plus grands des intervalles $(s_i - s_{i-1})$, $(t_j - t_{j-1})$. La fonction $u(s, t)$ est à variation totale bornée par rapport à l'ensemble de s et de t (§ 7). Mais, m'écartant de la définition bien naturelle que j'avais adoptée ailleurs‡ je définis cette variation totale comme la borne supérieure de l'expression

$$\left| \sum_i \sum_j \epsilon_i\, \epsilon_j'\, \Delta_{i,j}\, u(s, t) \right|$$

où les ϵ_i, ϵ_j' sont de signes quelconques mais en valeurs absolues égales à l'unité. Je démontre alors que réciproquement si $u(s, t)$ est une fonction quelconque à variation totale bornée par rapport à l'ensemble de s et de t, la limite de l'expression (1) existe (§§ 8, 9) et définit une fonctionnelle bilinéaire

* Presented to the Society, Feb. 27, 1915.

† T. 150 (1910), p. 1231.

‡ *Extension au cas des intégrales multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes,* Nouvelles Annales de Mathématiques, 4[e] série, t. 10 (1910).

qui peut être également représentée par deux intégrales simples de Stieltjes successives (§§ 10, 11, 12). Il aurait été plus rapide de poser à priori la définition de l'intégrale double généralisée sous la forme (1) et d'en déduire la représentation des fonctionnelles bilinéaires. Mais j'ai préféré au risque de répéter plusieurs fois les mêmes raisonnements, montrer comment la définition des fonctionnelles bilinéaires conduit nécessairement à cette définition nouvelle de l'intégrale double.

J'applique ensuite les résultats obtenus aux fonctionnelles du second ordre (§ 13) et aux différentielles des fonctionnelles (§§ 14, 15, 16).

Rappel de quelques définitions et propriétés concernant les fonctionnelles lineaires

1. Suivant la terminologie de M. Hadamard, nous dirons qu'une *fonctionnelle U_f est définie* dans le champ des fonctions continues si, à toute fonction continue $f(x)$ correspond une valeur bien déterminée de U_f. (Je supposerai fixe et fini l'intervalle (a, b) où $f(x)$ est considérée.) La fonctionnelle U_f est *continue* si $U_{f_n} - U_{f_0}$ tend vers zéro lorsque la fonction continue $f_n(x)$ converge uniformément vers $f_0(x)$ dans (a, b). Elle est *distributive* lorsqu'on a l'identité $U_{f_1} + U_{f_2} = U_{f_1+f_2}$ quelles que soient les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ continues dans (a, b).

M. Hadamard appelle *fonctionnelles linéaires* les fonctionnelles qui sont distributives et continues. Elles vérifient, comme on le voit facilement, la relation

$$U_{cf(x)} = cU_{f(x)}$$

où c est un nombre quelconque. (Dans tout cet article je n'envisage que des quantités réelles). M. F. Riesz a démontré* que *toute fonctionnelle linéaire U_f peut s'écrire sous la forme*

(1 bis) $$U_f = \int_a^b f(s)\,du(s)$$

où $u(s)$ est une certaine fonction à variation bornée dans (a, b), indépendante de f, et où l'intégrale est prise *au sens de Stieltjes, c'est à dire* est égale à la limite unique de la somme

(2) $$\sum_1^n f(\sigma_i)[u(s_i) - u(s_{i-1})]$$

où les nombres σ_i, s_i sont des nombres quelconques tels que

$$a = s_0 \leqq \sigma_1 \leqq s_1 \leqq \sigma_2 \cdots \leqq \sigma_n \leqq s_n = b,$$

lorsque la plus grande des différences $(s_i - s_{i-1})$ tend vers zéro. M. F. Riesz a en outre montré† que si la détermination de $u(s)$ n'est pas unique,

---

*F. Riesz, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, t. 28 (1911), p. 43.

† Loc. cit., p. 38.

du moins on ne peut la remplacer que par une fonction qui est égale à $u(s)$ augmentée d'une constante sauf peut être pour un ensemble dénombrable de valeurs de s autres que a et que b. J'ai moi-même indiqué qu'on obtient l'unicité de $u(s)$ connaissant U_f si l'on impose à $u(s)$,—ce qui est toujours possible,—la condition d'être égale à o pour $s = b$ et d'être partout régulière $[2u(s) \equiv u(s+o) + u(s-o)]$.

Nous utiliserons aussi cette propriété de U_f: si la fonction $u(s)$ est partout régulière, sa variation totale dans (a, b) est égale à la *borne réduite* de U_f,—c'est à dire à la borne supérieure de U_f/mf en désignant par mf le maximum de $|f(x)|$ dans (a, b),—quand $f(x)$ est une fonction quelconque continue dans (a, b).* Cette propriété ressort du mode de démontration de la formule (1 bis).

2. Enfin, nous aurons besoin d'une autre propriété due à F. Riesz.†

Si, quelle que soit la fonction $f(x)$ continue dans a, b, on a

$$\int_a^b f(s)\,du(s) = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(s)\,du_n(s)$$

la variation totale de $u_n(x)$ est bornée supérieurement quand $u_n(x)$ est une fonction régulière à variation bornée. Cette propriété ayant été énoncée sans démonstration, nous allons l'établir. Il nous suffira pour cela,—suivant une indication qu'a bien voulu me communiquer M. F. Riesz,—de modifier légèrement le raisonnement employé par M. H. Lebesgue‡ pour prouver une proposition analogue.

Si le théorème n'était pas exact, on pourrait, étant donné un nombre positif quelconque l_0, trouver un entier n_0, tel que la variation totale de $\psi_{n_0}(s)$ de a à b soit supérieure à l_0, en posant $\psi_n(s) = u_n(s) - u(s)$. Mais cette variation étant la borne réduite de $\int_a^b f d\psi_{n_0}$, on pourra trouver une fonction continue f_0 telle que

$$\left| \int_a^b f_0 \, d\psi_{n_0} \right| > l_0 \cdot mf_0 .$$

Et d'autre part, d'après l'hypothèse, on pourra trouver un entier μ_0 tel que

$$\left| \int_a^b f_0 \, d\psi_n \right| < 1$$

pour $n > \mu_0$.

En poursuivant, on pourra, d'une facon générale ayant défini les nombres $n_0, n_1, \cdots n_{p-1}, \mu_0, \cdots \mu_{p-1}, l_0, \cdots l_{p-1}$, et les fonctions continues f_0, f_1,

* F. Riesz, loc. cit., p. 43.

† F. Riesz, Comptes Rendus, t. 149 (1909), p. 9.

‡ H. Lebesgue, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. 2 (1910), p. 61.

$\cdots f_{p-1}$, poser

$$l_p = 2^p \, V\psi_{n_{p-1}}$$

(en appelant $V\psi$ la variation totale de ψ de a à b), trouver un entier $n_p > \mu_{p-1}$ tel que $V\psi_{n_p} > l_p$, trouver une fonction continue de a à b, f_p telle que

$$\left| \int_a^b f_p \, d\psi_{n_p} \right| > l_p \cdot mf_p ,$$

et enfin trouver un entier μ_p tel que

$$\left| \int_a^b F_p \, d\psi_n \right| < 1$$

pour $n > \mu_p$, F_p étant la fonction continue

$$F_p = f_0 + k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_p f_p$$

où

$$k_p = \frac{1}{2^{p-1} \cdot V\psi_{n_{p-1}} \cdot mf_p}.$$

Or la fonction continue F_p converge uniformément vers une fonction limite F. Car

$$m(k_p f_p + \cdots + k_{p+q} f_{p+q}) \leqq k_p \, mf_p + \cdots + k_{p+q} \, mf_{p+q}$$

$$= \frac{1}{2^{p-1} \cdot V\psi_{n_{p-1}}} + \cdots + \frac{1}{2^{p+q-1} \cdot V\psi_{n_{p+q-1}}} < \frac{1}{l_0 \cdot 2^p}.$$

La fonction F est donc continue et on doit avoir

(2 bis) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b F d\psi_n = 0.$$

Or

$$\left| \int_a^b F d\psi_{n_p} \right| \geqq \left| \int_a^b k_p f_p \, d\psi_{n_p} \right| - \left| \int_a^b F_{p-1} \, d\psi_{n_p} \right| - \sum_{i=p+1}^{i=\infty} \left| \int_a^b k_i f_i \, d\psi_{n_p} \right| .$$

Mais

$$\left| \int_a^b k_p f_p \, d\psi_{n_p} \right| > k_p \cdot l_p \cdot mf_p = 2; \qquad \int_a^b F_{p-1} \, d\psi_{n_p} < 1;$$

et, pour $i > p$

$$\left| \int_a^b k_i f_i \, d\psi_{n_p} \right| \leqq k_i \cdot mf_i \, V\psi_{n_p} = \frac{1}{2^{i-1}} \frac{V\psi_{n_p}}{V\psi_{i-1}} < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Donc on aurait quel que soit p

$$\left| \int_a^b F d\psi_{n_p} \right| \geqq \tfrac{1}{2}$$

contrairement à l'égalité (2 bis).

FONCTIONNELLES BILINÉAIRES

3. Nous nous proposons maintenant d'étudier les fonctionnelles bilinéaires, c'est à dire les fonctionnelles $U_{f,\phi}$ qui dépendent de deux fonctions continues $f(x)$, $\phi(y)$, définies dans deux intervalles fixes $a \leqq x \leqq a'$; $b \leqq y \leqq b'$, ces fonctionnelles étant linéaires séparément par rapport à $f(x)$ et par rapport à $\phi(y)$.

Nous démontrerons d'abord une propriété fondamentale de ces fonctionnelles. Par hypothèse $U_{f,\phi}$ est continue par rapport à $f(x)$ quand on y considère $\phi(x)$ comme bien déterminée et inversement. Mais est-il certain que U_{f_n,ϕ_n} converge vers $U_{f,\phi}$ lorsque f_n et ϕ_n convergent uniformément *et simultanément* vers f et ϕ? Nous allons montrer que la réponse est affirmative.

Dans ce but, remarquons que pour un choix déterminé de ϕ, on peut représenter $U_{f,\phi}$ sous la forme (1 bis) d'une intégrale de Stieltjes. Si on suppose que dans cette formule (1), $u(s)$ est nulle pour $s = b$ et qu'elle est partout régulière, $u(s)$ est bien déterminée. C'est donc une fonctionnelle de ϕ; on pourra rappeler cette dépendance en représentant $u(s)$ par la notation $v_\phi(s)$. On a donc

$$U_{f,\phi} = \int_a^{a'} f(s)\, dv_\phi(s) \tag{3}$$

et de même

$$U_{f,\phi} = \int_b^{b'} \phi(t)\, dw_f(t). \tag{3 bis}$$

On voit facilement que v_ϕ est une fonctionnelle distributive par rapport à ϕ. On peut même obtenir aussi facilement un résultat un peu plus général: soient c_1, c_2 deux nombres rationnels quelconques, ϕ_1, ϕ_2 deux fonctions continues dans (b, b'). On a

$$\int_a^{a'} f(s)\, dv_{c_1\phi_1+c_2\phi_2}(s) = U_{f,\,c_1\phi_1+c_2\phi_2} = c_1\, U_{f_1\phi_1} + c_2\, U_{f_1\phi_2}$$
$$= \int_a^{a'} f(s)\, d\,[c_1\, v_{\phi_1}(s) + c_2\, v_{\phi_2}(s)].$$

La fonction de s, $c_1\, v_{\phi_1}(s) + c_2\, v_{\phi_2}(s)$, est aussi nulle pour $s = b$ et elle est partout régulière, elle doit donc être égale à $v_{c_1\phi_1+c_2\phi_2}$, puisque les fonctionnelles représentées par les termes extrêmes sont identiques. On a donc

$$v_{c_1\phi_1+c_2\phi_2}(s) = c_1\, v_{\phi_1}(s) + c_2\, v_{\phi_2}(s). \tag{4}$$

4. Cette remarque étant faite, nous allons montrer que l'expression

$$\frac{|U_{f,\phi}|}{mf \cdot m\phi} \; *$$

* Je rappelle que la notation $m\phi$ désigne le maximum de la fonction continue $|\phi(s)|$ dans son intervalle de définition (b, b').

a une borne supérieure finie quand f et ϕ sont des fonctions continues quelconques dans (a, a'), (b, b'). On sait que

$$\frac{U_{f,\phi}}{mf \cdot m\phi} \leqq \frac{(\text{variation totale de } v_\phi(s) \text{ dans } (a, a'))}{m\phi}.$$

Il suffit de montrer que le second membre est borné supérieurement. Or dans le cas contraire, on pourrait trouver des fonctions ϕ_n continues dans (b, b') telles que la variation totale de v_{ϕ_n} dans $(a, a') \geqq n \cdot m\phi_n$. Posons

$$\psi_n = \frac{\phi_n}{\sqrt{n} \cdot m\phi_n},$$

on a d'après (4)

$$v_{\psi_n} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot m\phi_n} \cdot v_{\phi_n}$$

d'où

$$(\text{variation totale de } v_{\psi_n}) = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot m\phi_n} (\text{variation totale de } v_{\phi_n}) \geqq \sqrt{n}.$$

Donc la variation totale de v_{ψ_n} croît indéfiniment avec n. Or il est évident que $m\psi_n = 1/\sqrt{n}$ et par suite que

$$\int_b^{b'} \psi_n(t)\, dw_f(t)$$

tend vers zéro avec $1/n$; c'est à dire que l'opération linéaire en f

$$\int_a^{a'} f(s)\, dv_{\psi_n}(s)$$

converge vers zéro avec $1/n$. Mais, d'après F. Riesz, comme nous l'avons rappelé, l'une des conditions pour qu'il en soit ainsi est que la variation totale de v_{ψ_n} soit bornée quand n croît, contrairement à l'hypothèse.

Soit donc M la borne supérieure finie du rapport

$$\frac{(\text{variation totale de } v_\phi)}{m\phi}.$$

On voit alors que

$$|U_{f_n, \phi_n} - U_{f,\phi}| \leqq |U_{f_n, \phi_n} - U_{f_n, \phi}| + |U_{f_n, \phi} - U_{f,\phi}|$$
$$\leqq M\{mf_n \cdot m(\phi_n - \phi) + m(f - f_n) \cdot m\phi\}.$$

Si f_n et ϕ_n convergent uniformément et simultanément vers f, ϕ, on voit bien maintenant que U_{f_n, ϕ_n} tend vers $U_{f,\phi}$.

Représentation des fonctionnelles bilinéaires au moyen d'intégrations successives

5. Il résulte en particulier des considérations précédentes que l'on a quelque soit s

$$|v_\phi(s) - v_\phi(a')| \leqq (\text{variation totale de } v_\phi \text{ dans } (a, a')) \leqq M \cdot m\phi$$

et puisque $v_\phi(a') = 0$ par hypothèse,

$$|v_\phi(s)| \leqq M \cdot m\phi \tag{6}$$

ou

$$|v_{\phi_1-\phi_2}| \leqq M \cdot m(\phi_1 - \phi_2). \tag{7}$$

D'après (4) et (7), v_ϕ est donc une fonctionnelle linéaire de ϕ et l'on peut écrire

$$v_\phi(s) = \int_b^{b'} \phi(t)\, du(s, t), \tag{8}$$

$u(s, t)$ étant une fonction à variation bornée en t, nulle pour $t = b'$ et régulière partout en t. D'ailleurs $v_\phi(a') = 0$ quelque soit ϕ; on doit donc prendre $u(a, t) \equiv 0$. De sorte qu'on *peut finalement représenter toute fonctionnelle bilinéaire sous la forme*

$$U_{f,\phi} = \int_a^{a'} f(s) \cdot d_s\left[\int_b^{b'} \phi(t)\, d_t\, u(s, t)\right] \tag{9}$$

ou aussi, en raisonnant de même à partir de la formule (3 bis),

$$U_{f,\phi} = \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t\left[\int_a^{a'} f(s)\, d_s\, u_1(s, t)\right]. \tag{9 bis}$$

Dans ces expressions, l'indice de d_s et d_t indique si l'on doit, dans le terme qui suit, faire varier s ou t. Les deux fonctions $u(s, t)$, $u_1(s, t)$ sont bien définies pour $a \leqq s \leqq a'$; $b \leqq t \leqq b'$, nulles toutes deux pour $s = a'$ et pour $t = b'$, la première régulière et à variation bornée par rapport à t, la deuxième régulière et à variation bornée par rapport à s.

Représentation de toute fonctionnelle bilinéaire par une intégrale double

6. Nous allons utiliser une formule analogue à la formule de la moyenne et très simple à établir,

$$\left|\int_a^{a'} f(s)\, d\alpha(s) - \sum_1^n f(\sigma_i)[\alpha(s_i) - \alpha(s_{i-1})]\right| \leqq w_{f,\epsilon} \cdot (\text{variation totale de } \alpha), \tag{10}$$

où $a = s_0 \leqq \sigma_1 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq \sigma_n \leqq s_n = a'$, et où $w_{f,\epsilon}$ est l'oscillation

maximum de $f(s)$ dans un intervalle de longueur ϵ égal au plus grand des intervalles (s_{i-1}, s_i). En prenant pour $\alpha(s)$ la fonction $v_\phi(s)$, on a donc

$$(10 \text{ bis}) \qquad \left| U_{f,\phi} - \sum_1^n f(\sigma_i)[v_\phi(s_i) - v_\phi(s_{i-1})] \right| \leqq M \cdot m\phi \cdot w_{f,\epsilon}.$$

Mais on a d'après (8)

$$(11) \qquad \sum_1^n f(\sigma_i)[v_\phi(s_i) - v_\phi(s_{i-1})] = \int_b^{b'} \phi(t)\, d\lambda_f(t),$$

où $\lambda_f(t)$ est la fonction régulière et à variation bornée, nulle pour $t = b'$,

$$(12) \qquad \lambda_f(t) = \sum_1^n f(\sigma_i)[u(s_i, t) - u(s_{i-1}, t)].$$

Or

$$(13) \qquad \left| \int_b^{b'} \phi(t)\, d\lambda_f - \sum_{j=1}^{j=p} \phi(\tau_j)[\lambda_f(t_j) - \lambda_f(t_{j-1})] \right| \leqq w_{\phi,\epsilon'} \cdot (\text{variation totale de } \lambda_f(t)),$$

où $b = t_0 \leqq \tau_1 \leqq t_1 \leqq \tau_2 \cdots \leqq \tau_p \leqq t_p = b'$, et où ϵ' est la plus grande longueur des intervalles (t_{j-1}, t_j). Or d'après (11)

$$\left| \int_b^{b'} \phi(t)\, d\lambda_f(t) \right| \leqq mf \cdot (\text{variation totale de } v_\phi(s)) \leqq M \cdot mf \cdot m\phi$$

et comme la variation totale de λ_f est égale à la borne réduite de la fonctionnelle linéaire en ϕ, $\int_b^{b'} \phi(t)\, d\lambda_f(t)$, on a

$$(14) \qquad \text{variation totale de } \lambda_f \leqq M \cdot mf.$$

En combinant (10 bis), (11), (13), (14), on obtient l'inégalité

$$\left| U_{f,\phi} - \sum_{j=1}^{j=p} \phi(\tau_j)[\lambda_f(t_j) - \lambda_f(t_{j-1})] \right| \leqq M \cdot [m\phi \cdot w_{f,\epsilon} + mf \cdot w_{\phi,\epsilon'}]$$

ou d'après (12)

$$(15) \qquad \left| U_{f,\phi} - \sum_{j=1}^{j=p} \sum_{i=1}^{i=n} \phi(\tau_j) f(\sigma_i)[u(s_i, t_j) - u(s_{i-1}, t_j) - u(s_i, t_{j-1}) + u(s_{i-1}, t_{j-1})] \right| \leqq M[m\phi \cdot w_{f,\epsilon} + mf \cdot w_{\phi,\epsilon'}].$$

Quand on fait tendre ϵ et ϵ' simultanément vers zéro, $w_{f,\epsilon}$ et $w_{\phi,\epsilon'}$ tendent simultanément vers zéro. Par suite

$$(16) \qquad U_{f,\phi} = \lim_{\substack{\epsilon=0 \\ \epsilon'=0}} \sum_{i,j} f(\sigma_i)\, \phi(\tau_j)\, \Delta_{i,j}\, u,$$

où $\Delta_{i,\,j}\, u$ est une différence seconde de u

$$\Delta_{i,\,j}\, u = u(s_i, t_j) - u(s_{i-1}, t_j) - u(s_i, t_{j-1}) + u(s_{i-1}, t_{j-1}).$$

Ceci nous montre d'abord qu'il existe une fonction $u(s, t)$ indépendante de f et de ϕ telle que le second membre de (16) ait une limite unique quels que soient les modes de division en s_i, t_j des intervalles (a, a'), (b, b'). Il est alors naturel de *considérer ce second membre comme représentant une généralisation de l'intégrale double et de le représenter par la notation*

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t) \cdot d_s\, d_t\, u(s, t). \tag{17}$$

Et la formule (16) nous fournit alors *une nouvelle représentation des fonctionnelles bilinéaires*

$$U_{f,\,\phi} = \int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t) \cdot d_s\, d_t\, u(s, t). \tag{18}$$

La formule (15) peut alors être considérée comme une généralisation de la formule (10).

Propriété caractéristique de la fonction $u(s, t)$

7. Soient $s, \cdots, s_n, t_1, t_2, \cdots$, des nombres quelconques tels que

$$a = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \cdots \leqq s_n = a'; \qquad b = t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \cdots \leqq t_p = b'$$

et $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n, \epsilon_1', \cdots, \epsilon_p'$ des nombres égaux à 1 ou à -1, mais de signes arbitraires. Je dis que *la quantité*

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=p} \epsilon_i\, \epsilon_j' \left[u(s_i, t_j) - u(s_{i-1}, t_j) - u(s_i, t_{j-1}) + u(s_{i-1}, t_{j-1}) \right] \right| \tag{19}$$

a une borne supérieure finie quand on fait varier de façon quelconque les nombres $s_i, t_j, \epsilon_i, \epsilon_j', n, p$ (*choisis cependant comme il vient d'être spécifié*). Et de plus *cette borne supérieure est égale à la "borne réduite" de* $U_{f,\,\phi}$ c'est à dire à la borne supérieure de $U_{f,\,\phi}/mf \cdot m\phi$ dans l'ensemble des fonctions continues f, ϕ.

On a d'abord évidemment

$$\left| \sum_i \epsilon_i [v_\phi(s_i) - v_\phi(s_{i-1})] \right| \leqq \sum_i |v_\phi(s_i) - v_\phi(s_{i-1})|$$
$$\leqq (\text{variation totale de } v_\phi) \leqq M \cdot m\phi.$$

Or

$$\sum_i \epsilon_i [v_\phi(s_i) - v_\phi(s_{i-1})] = \int_b^{b'} \phi(t)\, d\mu(t)$$

avec

$$\mu(t) = \sum_i \epsilon_i [u(s_i, t) - u(s_{i-1}, t)].$$

La fonction $\mu(t)$ est régulière et à variation bornée; sa variation totale est

donc la borne supérieure de

$$\frac{\left|\int_b^{b'} \phi(t)\, d\mu(t)\right|}{m\phi} \leqq \frac{\sum_i \epsilon_i [v_\phi(s_i) - v_\phi(s_{i-1})]}{m\phi} \leqq M.$$

On a donc

$$\left|\sum_j \epsilon_j' [\mu(t_j) - \mu(t_{j-1})]\right| \leqq (\text{variation totale de } \mu(t)) \leqq M.$$

Or le premier membre n'est autre que l'expression (19). Nous avons donc bien prouvé que cette expression reste bornée supérieurement et même que sa borne supérieure est au plus égale à celle, M, du rapport

$$\frac{(\text{variation totale de } v_\phi)}{m\phi}.$$

Celle ci est égale à la borne réduite M' de $U_{f,\,\phi}$; nous avons déjà vu en effet (§ 4) qu'elle lui est au moins égale: $M \geqq M'$. D'autre part quand ϕ est fixé, on peut choisir une fonction f telle que le rapport $\left|\int_a^{a'} f(s)\, dv_\phi(s)\right| / mf$ soit voisin de la variation totale de v_ϕ. Donc si on a préalablement choisi ϕ de sorte que le rapport

$$\frac{(\text{variation totale de } v_\phi)}{m\phi}$$

soit suffisamment voisin de sa borne supérieure M, l'expression $U_{f,\,\phi}/mf \cdot m\phi$ sera aussi voisine que l'on veut de M. Par suite $M \leqq M' \leqq M$, d'où $M = M'$. On a ainsi démontré l'inégalité

$$\left|\sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j' \Delta_{i,\,j} u\right| \leqq M, \tag{20}$$

où M est maintenant aussi la borne réduite de $U_{f,\,\phi}$. Nous verrons un peu plus loin, § 10, que la borne supérieure N du premier membre non seulement, comme le démontre cette inégalité, est au plus égale à M; mais encore qu'elle lui est exactement égale.

8. Une conséquence importante de l'inégalité (20) est la suivante. Nous avons vu que $u(s, t)$ est à variation bornée par rapport à t. Nous allons voir qu'il en est de même par rapport à s et que la *variation totale de $u(s, t)$, soit par rapport à s, soit par rapport à t, reste inférieure ou égale à un nombre indépendant de t et de s et en particulier à M.* Appliquons en effet l'inégalité (20) en prenant $p = 2$. On aura:

$$\left|\epsilon_1' \sum_i \epsilon_i \Delta_{i1} u + \epsilon_2' \sum_i \epsilon_i \Delta_{i2} u\right| \leqq M.$$

Prenons les ϵ_i de sorte que les $\epsilon_i \Delta_{i2} u$ soient $\geqq 0$; puis, ayant fixé les ϵ_i, prenons

$\epsilon_2' = 1$ et ϵ_1' de sorte que $\epsilon_1' \sum_i \epsilon_i \Delta_{i1} u \geqq 0$, on aura alors

$$\sum_i |\Delta_{i2} u| \leqq |\epsilon_1' \sum_i \epsilon_i \Delta_{i1} u + \epsilon_2' \sum_i \epsilon_i \Delta_{i2} u| \leqq M.$$

Comme d'autre part $t_2 = b'$ et $u(s, b') = 0$, on aura

$$\Delta_{i2} u = u(s_i, t_1) - u(s_{i-1}, t_1);$$

d'où enfin

$$\sum_{i=1}^{i=n} |u(s_i, t_1) - u(s_{i-1}, t_1)| \leqq M.$$

Ainsi $u(s, t_1)$ est à variation bornée quel que soit le nombre arbitraire t_1 et sa variation est au plus égale à M. On verrait de même que la variation totale de $u(s_1, t)$—qu'on sait déjà être bornée quel que soit s_1—reste au plus égale à M.

Définition générale de l'intégrale double

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t) \cdot d_s d_t k(s, t)$$

9. La fonctionnelle bilinéaire $U_{f,\phi}$ nous a conduit à la conception de l'intégrale double

(21) $$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t) \cdot d_s d_t u(s, t).$$

Il est naturel de se demander si, sans s'occuper de l'origine de la fonction $u(s, t)$, les propriétés de la fonction u suffisent à donner un sens à l'intégrale double. Nous allons démontrer que la réponse est affirmative.

Ainsi nous allons partir *d'une fonction $k(s, t)$ dont on sait seulement qu'elle est à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et de t. Nous entendons par là que l'expression*

(22) $$\left| \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=p} \epsilon_i \epsilon_j' [k(s_i, t_j) - k(s_{i-1}, t_j) - k(s_i, t_{j-1}) + k(s_{i-1}, t_{j-1})] \right|$$

reste inférieure à un nombre fixe P quels que soient les nombres $n, p, \epsilon_i, \epsilon_j'$, s_i, t_j tels que

$$|\epsilon_i| = |\epsilon_j'| = 1; \qquad a = s_0 \leqq s_1 \cdots \leqq s_n = a'; \qquad b = t_0 \leqq t_1 \cdots \leqq t_p = b'.$$

Et nous allons montrer que si ϵ, ϵ' désignent les plus grandes des quantités $(s_i - s_{i-1})$ et $(t_j - t_{j-1})$, si $f(s)$ et $\phi(t)$ désignent deux fonctions uniformément continues respectivement pour $a \leqq s \leqq a'$; $b \leqq t \leqq b'$, et σ_i, τ_j un point quelconque du rectangle $s_{i-1} \leqq \sigma_i \leqq s_i$; $t_{j-1} \leqq \tau_j \leqq t_j$, *l'expression*

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=p} f(\sigma_i) \cdot \phi(\tau_j) \Delta_{i,j} k(s, t)$$

a une limite déterminée et unique quand ϵ et ϵ' tendent simultanément vers zéro.

En effet, soit un autre système de valeurs des nombres $n, p, \sigma_i, \tau_j, s_i, t_j$; à savoir $n', p', \sigma'_{i'}, \tau'_{j'}, s'_{i'}, t'_{j'}$, pour lequel les plus grandes des quantités $s'_{i'} - s'_{i'-1}, t'_{j'} - t'_{j'-1}$ sont respectivement inférieures à η, η'. Combinons les deux systèmes en rangeant par ordre de grandeur les $s_i, s'_{i'}$ dans une seule suite $s''_{i''}$ et les $t_j, t'_{j'}$ en une seule suite $t''_{j''}$. Il est facile de voir que $\Delta_{i,j}$ sera la somme de plusieurs quantités $\Delta_{i'',j''}$ et de même pour $\Delta_{i',j'}$; que, par suite, on a

$$\sum_{i,j} f(\sigma_i)\phi(\tau_j)\Delta_{i,j}k - \sum_{i',j'} f(\sigma'_{i'})\phi(\tau'_{j'})\Delta_{i',j'}k = \sum_{i'',j''}[f(\sigma_i)\phi(\tau_j) - f(\sigma'_{i'})\phi(\tau'_{j'})]\Delta_{i'',j''}k, \tag{23}$$

où

$$s_{i-1} \leqq s''_{i''-1} \leqq s''_{i''} \leqq s_i; \qquad s'_{i'-1} \leqq s''_{i''-1} \leqq s''_{i''} \leqq s'_{i'}; \qquad \text{et de même pour les } t.$$

De sorte que

$$\sigma_i - \sigma'_{i'} = (\sigma_i - s_{i-1}) - (s''_{i''-1} - s_{i-1}) - (s'_{i'} - s''_{i''-1}) + (s'_{i'} - \sigma'_{i'}),$$

d'où

$$|\sigma_i - \sigma'_{i'}| \leqq 2(\epsilon + \eta),$$

et de même

$$|\tau_j - \tau'_{j'}| \leqq 2(\epsilon' + \eta').$$

Si donc $\epsilon + \eta < \theta/2$ et $\epsilon' + \eta' < \theta'/2$ on aura

$$|f(\sigma_i) - f(\sigma'_{i'})| \leqq w_{f,\theta}, \qquad |\phi(\tau_j) - \phi(\tau'_{j'})| \leqq w_{\phi,\theta'}.$$

Or, en appelant $S - S'$ la différence (23), on aura

$$|S - S'| = |\sum_{i'',j''} f(\sigma_i)[\phi(\tau_j) - \phi(\tau'_{j'})]\Delta_{i'',j''}k + \phi(\tau'_{j'})[f(\sigma_i) - f(\sigma'_{i'})]\Delta_{i'',j''}k| = mf \cdot w_{\phi,\theta'}|\sum_{i''}\Theta''_{i''}[\sum_{j''}\Omega'_{j''}\Delta''_{i'',j''}]| + m\phi \cdot w_{f,\theta}|\sum_{j''}\Theta'_{j''}[\sum_{i''}\Omega_{i''}\Delta_{i'',j''}]|,$$

où les $\Theta, \Theta', \Omega, \Omega'$ sont en valeurs absolues inférieurs ou égaux à l'unité. D'où

$$|S - S'| \leqq mf \cdot w_{\phi,\theta'}\sum_{i''}|\sum_{j''}\Omega'_{j''}\Delta_{i'',j''}| + m\phi \cdot w_{f,\theta}\sum_{j''}|\sum_{i''}\Omega_{i''}\Delta_{i'',j''}|. \tag{24}$$

On peut choisir des nombres $\epsilon_{i''} = \pm 1$ tels que

$$\sum_{i''}|\sum_{j''}\Omega'_{j''}\Delta_{i'',j''}| = |\sum_{i''}\epsilon_{i''}\sum_{j''}\Omega'_{j''}\Delta_{i'',j''}| = |\sum_{j''}\Omega'_{j''}\sum_{i''}\epsilon_{i''}\Delta_{i'',j''}| \leqq \sum_{j''}|\sum_{i''}\epsilon_{i''}\Delta_{i'',j''}|.$$

En choisissant convenablement des nombres $\epsilon'_{j''} = \pm 1$, on aura

$$\epsilon'_{j''} \sum_{i''} \epsilon_{i''} \Delta_{i'', j''} = \left| \sum_{i''} \epsilon_{i''} \Delta_{i'', j''} \right|,$$

d'où

$$\sum_{i''} \left| \sum_{j''} \Omega'_{j''} \Delta_{i'', j''} \right| = \left| \sum_{i''} \sum_{j''} \epsilon_{i''} \epsilon'_{j''} \Delta_{i'', j''} \right| \leqq P.$$

En opérant de même sur le second terme de l'inégalité (24) on arrive finalement à la formule

(24 bis) $$|S - S'| \leqq P [mf \cdot w_{\phi, \theta'} + m\phi \cdot w_{f, \theta}].$$

On en déduit par un raisonnement classique, que si ϵ, ϵ', η, η' tendent vers zéro simultanément, S et S' ont une limite qui est la même. Ainsi, quand ϵ, ϵ' tendent vers zéro simultanément S a une limite déterminée, indépendante du choix des nombres n, p, s_i, t_j, σ_i, τ_j; limite que nous désignerons par

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \phi(\tau) d_s d_t k(s, t).$$

De plus, si on laisse ϵ, ϵ' fixes et si on prend les points de division $s'_{i'}$, $t'_{j'}$, de sorte qu'ils comprennent parmi eux tous les points s_i, t_j on aura $|\sigma_i - \sigma'_{i'}| < \epsilon$, $|\tau_i - \tau'_{i'}| < \epsilon'$; on pourra donc, dans la formule (24 bis), remplacer θ, θ' par ϵ, ϵ'. Si maintenant on fait tendre η, η' vers zéro en laissant ϵ, ϵ' fixes, la formule (24 bis) devient

(25) $$\left| \int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \phi(t) d_s d_t k(s, t) - S \right| \leqq P(mf \cdot w_{\phi, \epsilon'} + m\phi \cdot w_{f, \epsilon}).$$

L'INTÉGRALE DOUBLE $\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t) d_s d_t k(s, t)$ EST UNE FONCTIONNELLE BILINÉAIRE

10. Nous arrivons maintenant à la réciproque du théorème concernant la représentation d'une fonctionnelle bilinéaire par l'intégrale double généralisée (17). Posons

$$K_{f, \phi} = \int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t) d_s d_t k(s, t).$$

Il est manifeste, d'après l'expression de S que sa limite $K_{f, \phi}$ est une fonctionnelle distributive par rapport à f et à ϕ séparément. Pour montrer que c'est une fonctionnelle bilinéaire en f et ϕ, il suffit (§ 4) de prouver que $K_{f, \phi}/mf \cdot m\phi$ est borné supérieurement. Or on a

$$\frac{|K_{f, \phi}|}{mf \cdot m\phi} = \lim \frac{|S|}{mf \cdot m\phi} = \lim \left| \sum_i \sum_j \frac{f(\sigma_i)}{mf} \cdot \frac{\phi(\tau_j)}{m\phi} \cdot \Delta_{i, j} k \right|.$$

Mais un raisonnement développé précédemment (§ 9) nous montrait que

l'on a

$$\Big|\sum_i \sum_j \Theta_i\, \Omega_j\, \Delta_{i,j}\, k\Big| \leqq P,$$

sous la seule condition que les Θ_i et Ω_j soient en valeurs absolues au plus égaux à 1. On a donc

$$\left|\sum_i \sum_j \frac{f(\sigma_i)}{mf} \cdot \frac{\phi(\tau_j)}{m\phi} \cdot \Delta_{i,j}\, k\right| \leqq P$$

et par suite $K_{f,\phi}$ a une "borne réduite" finie et celle-ci est au plus égale à P. Il en résulte immédiatement que $K_{f,\phi}$ est continue par rapport à f et ϕ et par suite bilinéaire.

Ainsi *quelle que soit la fonction $k(s,t)$ à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et t,** *l'intégrale double*

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t) \cdot d_s\, d_t\, k(s,t)$$

a un sens et représente une fonctionnelle bilinéaire $K_{f,\phi}$. De plus *la "borne réduite" de K,* c'est-à-dire la borne supérieure de $|K_{f,\phi}|/mf \cdot m\phi$ *est au plus égale à la variation totale de $k(s,t)$,* c'est à dire à la borne supérieure de l'expression (22). Enfin, on peut, sans changer la valeur de la fonctionnelle, remplacer $k(s,t)$ par une certaine fonction $u(s,t)$ également à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et de t et dont la variation totale est exactement égale à la borne réduite de $K_{f,\phi}$. Ce dernier point résulte de la combinaison des résultats de ce numéro et du numéro 7.

Représentation de l'intégrale double par deux intégrales successives

11. Il est manifeste que si l'on sait seulement que $k(s,t)$ est à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et de t, on n'a plus le droit de calculer cette intégrale double comme on l'a fait pour la fonction particulière u au moyen de deux intégrations successives sous la forme

$$(26)\qquad \int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t)\, d_s\, d_t\, k(s,t) = \int_a^{a'} f(s)\, d_s \left\{ \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t\, k(s,t) \right\}.$$

En effet, il faudrait au moins pour cela que l'accolade ait un sens; or la fonction $k(s,t)$ n'est pas nécessairement à variation bornée par rapport à l'une des variables s,t considérée isolément. Si, par exemple, on désigne par $k(t)$ une fonction à variation non bornée dans (b, b'), on a le droit de prendre $k(s,t) = k(t)$ puisque cette fonction est à variation totale évidemment

* Je rappelle que la variation totale de $k(s,t)$ n'est pas la borne supérieure de $|\sum_i \sum_j \Delta_{i,j} k|$, mais celle de $|\sum_i \sum_j \epsilon_i\, \epsilon_j'\, \Delta_{i,j}\, k|$ comme il a été précisé plus haut, § 9.

nulle par rapport à l'ensemble de s et de t. Dès lors pour que la relation (26) ait un sens, il faut au moins supposer que $k(s, t)$, fonction à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et t, soit aussi à variation bornée par rapport à t.

Remarquons en passant que si $k(s, t)$, à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et t, est à variation bornée pour *une* valeur particulière s' de s, elle est à variation bornée pour *toute* valeur de s. Posons en effet $k_1(s, t) = k(s, t) - k(s, b')$. On aura évidemment $\Delta_{i,j} k_1 = \Delta_{i,j} k$. Donc k_1 sera aussi à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et t et sera de plus nulle pour $t = b'$. Cela suffit pour qu'on puisse appliquer un raisonnement analogue à celui du numéro 8 et par suite pour que $k_1(s, t)$ soit à variation bornée en t quelque soit s. Alors

$$k(s, t) = k(s', t) + k_1(s, t) - [k_1(s', t) + k(s', b') - k(s, b')]$$

est la somme de trois fonctions à variation bornée en t quelque soit s; elle jouit donc de la même propriété. Nous allons montrer que cette condition nécessaire pour l'écriture de (26) est aussi suffisante pour que cette égalité (26) ait un sens et soit exacte. En effet $k(s, t)$ étant à variation bornée en t quel que soit s, l'intégrale

$$\gamma_\phi(s) = \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t k(s, t)$$

a un sens et représente une fonctionnelle linéaire par rapport à ϕ, bien définie pour toute valeur de s. C'est en même temps une fonction de s à variation bornée. En effet quelle que soit la suite $a = s_0 \leqq s_1 \cdots \leqq s_n = a'$, on a en choisissant convenablement les ϵ

$$\sum_i |\gamma_\phi(s_i) - \gamma_\phi(s_{i-1})| = \Sigma \epsilon_i\,]\gamma_\phi(s_i) - \gamma_\phi(s_{i-1})] = \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t\, l(t),$$

où

$$l(t) = \sum_i \epsilon_i [k(s_i, t) - k(s_{i-1}, t)]$$

est une fonction à variation bornée. Donc

$$\sum_i |\gamma_\phi(s_i) - \gamma_\phi(s_{i-1})| \leqq m\phi \cdot (\text{variation totale de } l(t)).$$

Or en prenant arbitrairement la suite $b = t_0 \leqq t_1 \cdots \leqq t_p = b'$, et choisissant convenablement les ϵ'_j, on a

$$\sum_j |l(t_j) - l(t_{j-1})| = |\sum_j \epsilon'_j [l(t_j) - l(t_{j-1})]| = |\sum_i \sum_j \epsilon_i \epsilon'_j \Delta_{i,j} k(s, t)| \leqq P$$

où P est la variation totale de $k(s, t)$ par rapport à l'ensemble de s et de t. Donc enfin, quels que soient les s_i,

$$\sum_i |\gamma_\phi(s_i) - \gamma_\phi(s_{i-1})| \leqq P \cdot m\phi.$$

On en conclut d'abord que $\gamma_\phi(s)$ est une fonction de s à variation bornée. Par conséquent l'intégrale

$$H_{f,\phi} = \int_a^{a'} f(s)\, d_s\, \gamma_\phi(s) = \int_a^{a'} f(s)\, d_s \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t\, k(s,t)$$

a un sens.

Il reste à prouver que $K_{f,\phi} = H_{f,\phi}$. Il suffit d'utiliser dans ce but l'inégalité (25) en y laissant d'abord ϵ fixe et faisant tendre ϵ' vers zéro. Le second membre tendra vers $P \cdot m\phi \cdot w_{f,\epsilon}$; d'autre part la quantité

$$S = \sum_i f(\sigma_i) \{ \sum_j \phi(\tau_j)[k(s_i, t_j) - k(s_i, t_{j-1})] - \sum_j \phi(\tau_j)[k(s_{i-1}, t_j) - k(s_{i-1}, t_{j-1})] \}$$

tendra évidemment vers

$$\sum_i f(\sigma_i) \left\{ \int_b^{b'} \phi(t)\, dk(s_i, t) - \int_b^{b'} \phi(t)\, dk(s_{i-1}, t) \right\} = \sum_i f(\sigma_i)[\gamma_\phi(s_i) - \gamma_\phi(s_{i-1})].$$

On a donc

$$|K_{f,\phi} - \sum_i f(\sigma_i)[\gamma_\phi(s_i) - \gamma_\phi(s_{i-1})]| \leqq P \cdot m\phi \cdot w_{f,\epsilon}.$$

Si dans cette égalité on fait maintenant tendre ϵ vers zéro, on obtiendra à la limite l'égalité annoncée $H_{f,\phi} = K_{f,\phi}$.

12. Nous venons de prouver qu'on peut calculer l'intégrale double $K_{f,\phi}$ par deux intégrations successives *sous la forme* (26) quand $k(s,t)$ est non seulement à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et t mais encore à variation bornée par rapport à t pour au moins une valeur de s. Il faut bien remarquer que *si cette dernière condition n'est pas remplie, on pourra encore calculer l'intégrale double par deux intégrations successives,* mais celles-ci se présenteront sous une forme un peu plus compliquée que dans (26). Il suffit en effet de remarquer que la fonction $k_0(s,t) = k(s,t) - k(s,b')$ vérifie les deux conditions exigées pour $k(s,t)$ dans (26). On a donc

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t)\, d_s\, d_t\, k_0(s,t) = \int_a^{a'} f(s)\, d_s \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t\, k_0(s,t).$$

Or $\Delta_{i,j} k_0 = \Delta_{i,j} k$. Donc le premier membre est exactement égal à $K_{f,\phi}$. On peut raisonner de même en permutant s et t. En définitive *sous la seule condition que $k(s,t)$ ait une variation bornée par rapport à l'ensemble de s et t,* on aura

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} f(s) \cdot \phi(t)\, d_s\, d_t\, k(s,t) = \int_a^{a'} f(s)\, d_s \left\{ \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t [k(s,t) - k(s,b')] \right\} = \int_b^{b'} \phi(t)\, d_t \left\{ \int_a^{a'} f(s)\, d_s [k(s,t) - k(s',t)] \right\}.$$

FONCTIONNELLES DU SECOND ORDRE

13. Suivant la définition générale que j'ai donnée* des fonctionnelles d'ordre n, j'appellerai fonctionnelle du second ordre une fonctionnelle continue U_f telle que l'on ait identiquement

$$U_{f_1+f_2+f_3} - U_{f_1+f_2} - U_{f_2+f_3} - U_{f_3+f_1} + U_{f_1} + U_{f_2} + U_{f_3} - U_0 \equiv 0$$

quelles que soient les fonctions f_1, f_2, f_3 continues dans un intervalle fixe (a, b).

Une telle fonctionnelle est la somme† de trois fonctionnelles dont l'une se réduit à une constante, la seconde à une fonctionnelle linéaire, la troisième à une fonctionnelle du second ordre V_f *homogène*, c'est à dire telle que

$$V_{cf} = c^2 V_f$$

quelle que soit la constante réelle c. Il suffit donc de se borner à l'étude de cette dernière. On en trouvera facilement l'expression en ramenant au calcul d'une fonctionnelle bilinéaire. Posons en effet

$$W_{f_1, f_2} = V_{f_1+f_2} - V_{f_1} - V_{f_2} + V_0 .$$

On aura

$$W_{f_1+f_3, f_2} - W_{f_1, f_2} - W_{f_3, f_2} = V_{f_1+f_2+f_3} - V_{f_1+f_2} - V_{f_2+f_3} - V_{f_3+f_1} + V_{f_1} + V_{f_2} + V_{f_3} - V_0 .$$

Or le second membre est identiquement nul par hypothèse. Donc W_{f_1, f_2} est distributive en f_1; de même elle est distributive en f_2. Etant continue en f_1 et en f_2, c'est une fonctionnelle bilinéaire qui peut donc être mise sous la forme

$$W_{f_1, f_2} = \int_a^b f_1(s) f_2(t)\, d_s\, d_t\, w(s, t) .$$

Or, d'après la condition d'homogénéité de V, on a

$$V_0 = 0, \qquad V_{2f} = 4V_f .$$

On a donc $W_{2f} = 2V_f$. D'où, en posant $v(s, t) = \frac{1}{2} w(s, t)$,

$$V_f = \int_a^b \int_a^b f(s) f(t)\, d_s\, d_t\, v(s, t) . \tag{27}$$

Telle est l'expression générale des fonctionnelles homogènes du second ordre. Dans cette expression, permutons s et t, puis faisons la demi-somme des résultats obtenus, on aura

$$V_f = \int_a^b \int_a^b f(s) f(t)\, d_s\, d_t\, v_1(s, t) ,$$

* *Sur les fonctionnelles continues*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, t. 27 (1910), p. 204.

† Loc. cit.

où $v_1(s, t)$ est la demi-somme de $v(s, t)$ et de $v(t, s)$, c'est à dire où v_1 est une fonction symétrique. Ainsi dans la formule (27), la fonction $v(s, t)$ est une fonction à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et de t et *l'on peut supposer que c'est une fonction symétrique de s et de t.* Il est bien évident que réciproquement, l'expression (27) définit une fonctionnelle du second ordre homogène.

Application aux differentielles du second ordre des fonctionnelles

14. Nous avons déjà indiqué ailleurs* les avantages que présente la définition proposée par Stolz pour la différentielle totale. Outre la supériorité qu'elle possède sur la définition ordinaire dans le cas des fonctions de plusieurs variables, celui que considérait Stolz,—supériorité qui a été mise en évidenee pour la première fois par M. W. H. Young† et qui a récemment déterminé M. de la Vallée Poussin à l'adopter systématiquement dans la dernière édition de son *Cours d'Analyse*,—cette définition se prête à une généralisation immédiate dans le *Calcul Fonctionnel.* C'est même en partant de ce dernier point de vue que j'avais retrouvé la définition de Stolz.

Sans insister davantage,‡ je partirai de la définition suivante: une fonctionnelle U_f admet une différentielle pour $f = f_0$, s'il existe une fonctionnelle linéaire par rapport à l'accroissement Δf de f et que je désignerai par la notation $\partial_{\Delta f} U_{f_0}$, qui ne diffère de l'accroissement correspondant de U_f que par une quantité infiniment petite par rapport à l'écart des arguments f_0 et $f_0 + \Delta f$.

Dans le cas actuel où les fonctions $f(x)$ sont supposées continues dans un intervalle fixe (a, b) et la limite considérée pour ces fonctions est la limite uniforme, nous appellerons écart de f_0 et de $f_0+\Delta f$, le maximum de $|\Delta f|$ dans (a, b) et nous le représenterons par $m\Delta f$. On aura ainsi

$$\frac{(U_{f_0+\Delta f} - U_{f_0}) - \partial_{\Delta f} U_{f_0}}{m\Delta f} = \epsilon,$$

ϵ étant une quantité qui tend vers zéro en même temps que $m\Delta f$.

15. La définition de la différentielle seconde est alors toute naturelle. Nous dirons qu'une fonctionnelle U_f admet une différentielle seconde pour $f = f_0$ si 1° elle admet une différentielle première dans le voisinage de f_0, soit $\partial_{\Delta f} U_f$; 2° cette différentielle première admet elle même une différentielle première par rapport à un nouvel accroissement $\Delta' f$, pour $f = f_0$ et quel

* Voir pour plus de détails sur cette question ma note: *Sur la notion de différentielle totale*, Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e série, t. 12 (1912), pp. 385–433.

† W. H. Young, *The fundamental theorems of differential calculus.*

‡ Je me suis expliqué à ce sujet dans une communication *Sur la notion de differentielle dans le calcul fonctionnel,* Comptes Rendus du Congrès des Sociétés Savantes, 1912.

que soit Δf. Nous désignerons cette différentielle seconde par $\partial_{\Delta' f}\, \partial_{\Delta f}\, U_{f_0}$ et nous démontrerons immédiatement que *cette différentielle seconde est symétrique par rapport aux deux accroissements* $\Delta' f$, Δf.*

Nous supposons que U_f admet une différentielle pour

$$m(f - f_0) < \eta,$$

où η est un nombre convenablement choisi. On voit alors facilement que $F(\lambda) = U_{f_0+\lambda\Delta f}$ est une fonction du paramètre numérique λ qui a une dérivée F'_λ égale à $\partial_{\Delta f}\, U_{f_0+\lambda\Delta f}$ pour λ assez petit. On a donc

$$F(\lambda) - F(0) = \lambda F'(\theta\lambda), \qquad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

ou

$$U_{f_0+\lambda\Delta f} - U_{f_0} = \lambda \partial_{\Delta f}\, U_{f_0+\lambda\theta\Delta f}.$$

On aura une formule analogue en remplaçant U_f par $U_{f+\mu\Delta_1 f} - U_f$; d'où

$$(28) \quad U_{f_0+\lambda\Delta f+\mu\Delta_1 f} - U_{f_0+\lambda\Delta f} - U_{f_0+\mu\Delta_1 f} + U_{f_0} = \lambda\, [\, \partial_{\Delta f}\, U_{f_0+\mu\Delta_1 f+\lambda\theta\Delta f} - \partial_{\Delta f}\, U_{f_0+\lambda\theta\Delta f}]$$

pour

$$m(\mu\Delta_1 f + \lambda\Delta f) < \eta, \qquad m(\lambda\Delta f) < \eta,$$

ou

$$|\lambda|\, m\Delta f + |\mu|\, m\Delta_1 f < \eta.$$

Or on a en général, d'après la définition de la différentielle seconde,

$$\partial_{\Delta f}\, U_f - \partial_{\Delta f}\, U_{f_0} - \partial_{f-f_0}\, \partial_{\Delta f}\, U_{f_0} = w \cdot m(f - f_0),$$

où w tend vers zéro avec $m(f - f_0)$. En appliquant cette égalité pour $f = f_0 + \mu\Delta_1 f + \lambda\theta\Delta f$, et $f = f_0 + \lambda\theta\Delta f$, le second membre de l'égalité (28) devient

$$\lambda\, [\, \mu\partial_{\Delta_1 f}\, \partial_{\Delta f}\, U_{f_0} + w_1\, m(\mu\Delta_1 f + \lambda\theta\Delta f) - w_2\, m(\lambda\theta\Delta f)\,],$$

où w_1 et w_2 tendent vers zéro quand leurs facteurs respectifs tendent vers zéro. En particulier, pour $\mu = \lambda$, on a

$$\left| \frac{U_{f_0+\lambda(\Delta f+\Delta_1 f)} - U_{f_0+\lambda\Delta f} - U_{f_0+\lambda\Delta_1 f} + U_{f_0}}{\lambda^2} - \partial_{\Delta_1 f}\, \partial_{\Delta f}\, U_{f_0} \right|$$

$$= |\pm w_1\, m(\Delta_1 f + \theta\Delta f) \pm w_2\, m\theta\Delta f|$$

$$\leqq |w_1|\,(m\Delta_1 f + m\Delta f) + |w_2|\, m\Delta f,$$

d'où

$$\partial_{\Delta_1 f}\, \partial_{\Delta f}\, U_{f_0} = \lim_{\lambda=0} \frac{U_{f_0+\lambda(\Delta f+\Delta_1 f)} - U_{f_0+\lambda\Delta f} - U_{f_0+\lambda\Delta_1 f} + U_{f_0}}{\lambda^2}.$$

En permutant Δf et $\Delta_1 f$, le second membre ne change pas; on a donc

$$(29) \qquad \partial_{\Delta f}\, \partial_{\Delta_1 f}\, U_{f_0} = \partial_{\Delta_1 f}\, \partial_{\Delta f}\, U_{f_0}.$$

* Nous avons déjà donné une démonstration indirecte dans la communication citée plus haut.

16. D'après le théorème de F. Riesz, la différentielle première de U_f peut se mettre sous la forme

$$\partial_{\Delta f} U_f = \int_a^b \Delta f(s)\, d\alpha(s),$$

où $\alpha(s)$ est une fonction à variation bornée. On peut même supposer que α est une fonction partout régulière, nulle pour $s = b$. Alors ce sera une fonction bien déterminée pour chaque forme de f; on pourra la représenter par la notation $\alpha_f(s)$ et écrire

(30) $$\partial_{\Delta f} U_f = \int_a^b \Delta f(s)\, d\alpha_f(s).$$

Nous savons que la différentielle seconde $\partial_{\Delta_1 f} \partial_{\Delta f} U_{f_0}$ est une fonctionnelle linéaire par rapport à Δ_1; il n'est pas évident qu'elle soit linéaire par rapport à Δf; *mais cela résulte de la formule* (29). Ainsi cette différentielle seconde est une fonctionnelle bilinéaire de Δf et de $\Delta_1 f$. D'après la théorie que nous avons développée, *on peut donc trouver une fonction $u(s, t)$ à variation bornée par rapport à l'ensemble de s et de t et par rapport à s et t séparément, telle qu'on puisse écrire*

(31) $$\partial_{\Delta_1 f} \partial_{\Delta f} U_{f_0} = \int_a^b \int_a^b \Delta f(s) \cdot \Delta_1 f(t) \cdot d_s\, d_t\, u(s, t)$$
$$= \int_a^b \Delta f(s)\, d_s \int_a^b \Delta_1 f(t)\, d_t\, u(s, t)$$
$$= \int_a^b \Delta_1 f(t)\, d_t \int_a^b \Delta f(s)\, d_s\, u(s, t).$$

Mais puisque la différentielle seconde est symétrique en Δf, $\Delta_1 f$, les formules précédentes restent exactes si on remplace $u(s, t)$ par $u(t, s)$. Par suite, en prenant la demi-somme des deux systèmes de formules obtenues, on voit qu'on peut remplacer $u(s, t)$ par $[u(s, t) + u(t, s)]/2$; autrement dit, *on peut supposer que dans ces formules* (31), *$u(s, t)$ est une fonction symétrique de s et de t.*

Il serait intéressant et semble-t-il assez facile d'étudier la relation entre $\alpha_f(s)$ et $u(s, t)$.
